層別抽出法に於ける相関係数の推定

青　山　博　次　郎

(1953 年 12 月受付)

On the Estimation of the Correlation Coefficient in the Stratified Random Sampling

Hirojiro AOYAMA

In the ordinary sampling survey we used to take the most effective sampling technique for the estimation of the mean or the total quantity in the population. In these cases, however, we do not always take the simple sampling, so that we cannot use the ordinary formulas, which are made only for the case of the simple random sampling, for another parameters such as the correlation coefficient.

In this paper we calculated mean and variance of the weighted correlation coefficient in the stratified simple random sampling. In the proportional sampling, when we divide at random the population units into the strata of the same size as before, we get the same variance as in the simple random sampling. Therefore we may get better estimate by the stratification in some cases. So we may use in many cases the same variance for the estimate of the correlation coefficient as in the ordinary case.

Institute of Statistical Mathematics.

標本調査法に於ては母集団の平均，総量を推定することを目的とする場合が多いので，通常この為に最適なサンプリング法が考案されている．従つて通常の基本的サンプリングを除けば，各單位の抽出される確率は必ずしも等確率ではない．そのため平均，総量以外のパラメーターの推定には，近似的に等確率の場合の推定法を援用しているに過ぎないのである．然しながら通常の調査の場合そのような簡單な平均，総量のみにとどまらず，多くの量の関係を調べることも附隨して起る．例えば二量の相関係数を求めるという様なことである．ここでは一番簡單な層別ランダム・サンプリング法について相関係数の推定の問題を考えてみよう．

いま母集団の大きさを N，層の数を R，各層の大きさを N_l $(l=1,2,\cdots,R)$，サンプル総数を n，各層での割当サンプル数を n_l $(l=1,2,\cdots,R)$ としよう．

調査する二つの変量を x，y とし，調査の結果 $(x_i,\ y_j)$ なる標識をもつサンプルの数が第 l 層では f_{lij} であつたとしよう．ここで

$$
\left.
\begin{aligned}
&\bar{x}_l=\frac{1}{n_l}\sum_{i=1}^{s} f_{li\cdot}x_i\,, &&\bar{y}_l=\frac{1}{n_l}\sum_{j=1}^{t} f_{l\cdot j}y_j\\
&f_{li\cdot}=\sum_{j=1}^{t} f_{lij}\,, &&f_{l\cdot j}=\sum_{i=1}^{s} f_{lij}\\
&n_l=\sum_{i=1}^{s} f_{li\cdot}=\sum_{j=1}^{t} f_{l\cdot j} &&\\
&\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{R} N_l\bar{x}_l\,, &&\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{R} N_l\bar{y}_l
\end{aligned}
\right\}
\tag{1}
$$

とおく．

標本相関係数 r を求めるには，各層のサンプルに重み $w_l=N_l/n_l$ をつけて集計し

$$r=\frac{\frac{1}{N}\sum_i\sum_j\sum_l w_l f_{ilj}(x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_i\sum_l w_l f_{il\cdot}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_j\sum_l w_l f_{\cdot lj}(y_j-\bar{y})^2}} \tag{2}$$

によつて計算すればよい．

この r について平均，分散を求めるのであるが，一般に X, Y, Z なる確率変数に対して

$$E\left(\frac{Z}{\sqrt{XY}}\right)\doteqdot\frac{E(Z)}{\sqrt{E(X)E(Y)}} \tag{3}$$

$$D^2\left(\frac{Z}{\sqrt{XY}}\right)\doteqdot\frac{1}{E(X)E(Y)}\left\{\frac{E^2(Z)}{4E^2(X)}D^2(X)+\frac{E^2(Z)}{4E^2(Y)}D^2(Y)+D^2(Z)\right.$$
$$\left.-\frac{E(Z)}{E(X)}cov\,(X,Z)-\frac{E(Z)}{E(Y)}cov\,(Y,Z)+\frac{E^2(Z)}{2E(X)E(Y)}cov\,(X,Y)\right\} \tag{4}$$

が成立することを用いると（有限母集団修正は凡て省略する），まづ r の平均値は

$E(r)$

$$\doteqdot\frac{\frac{1}{N}\sum_l N_l\mu_{11}(l)+\frac{1}{N}\sum_l N_l(\bar{X}_l\bar{Y}_l-\bar{X}\bar{Y})-\frac{1}{N^2}\sum_l\frac{N_l^2}{n_l}\mu_{11}(l)}{\sqrt{\sum_l\frac{N_l}{N}\mu_{20}(l)+\sum_l\frac{N_l}{N}(\bar{X}_l-\bar{X})^2-\frac{1}{N^2}\sum_l\frac{N_l^2}{n_l}\mu_{20}(l)}\sqrt{\sum_l\frac{N_l}{N}\mu_{02}(l)+\sum_l\frac{N_l}{N}(\bar{Y}_l-\bar{Y})^2-\frac{1}{N^2}\sum_l\frac{N_l^2}{n_l}\mu_{02}(l)}}$$
$$=\rho+O\left(\frac{1}{n_l}\right) \tag{5}$$

となる．

ここで $\mu_{hk}(l)$ は第 l 層における h,k 次の中心モーメント，ρ は母集団相関係数を表わす．

分散については一般の場合の見通しをつけるため先づ $R=2$ のときの結果を記そう．

$$D^2(r)=\frac{1}{\mu_{20}\mu_{02}}\left[\frac{\mu_{11}^2}{4\mu_{20}^2}\left\{\frac{1}{n_1}\left(\frac{N_1^2}{N^2}(\mu_{40}(1)-\mu_{20}^2(1))+4\frac{N_1^2N_2^2}{N^4}\mu_{20}(1)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2\right.\right.\right.$$
$$\left.+\frac{4N_1^2N_2}{N^3}\mu_{30}(1)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\right)+\frac{1}{n_2}\left(\frac{N_2^2}{N^2}(\mu_{40}(2)-\mu_{20}^2(2))+\frac{4N_1^2N_2^2}{N^4}\mu_{20}(2)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2\right.$$
$$\left.\left.+\frac{4N_1N_2^2}{N^3}\mu_{30}(2)(\bar{X}_2-\bar{X}_1)\right)\right\}+\frac{\mu_{11}^2}{4\mu_{02}^2}\left\{\frac{1}{n_1}\left(\frac{N_1^2}{N^2}(\mu_{04}(1)-\mu_{02}^2(1))\right.\right.$$
$$\left.+\frac{4N_1^2N_2^2}{N^4}\mu_{02}(1)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2+\frac{4N_1^2N_2}{N^3}\mu_{03}(1)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)\right)+\frac{1}{n_2}\left(\frac{N_2^2}{N^2}(\mu_{04}(2)-\mu_{02}^2(2))\right.$$
$$\left.\left.+\frac{4N_1^2N_2^2}{N^4}\mu_{02}(2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2+\frac{4N_1N_2^2}{N^3}\mu_{03}(2)(\bar{Y}_2-\bar{Y}_1)\right)\right\}+\frac{1}{n_1}\left\{\frac{N_1^2}{N^2}(\mu_{22}(1)-\mu_{11}^2(1))\right.$$
$$+\frac{N_1^2N_2^2}{N^4}(\mu_{20}(1)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2+\mu_{02}(1)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2+2\mu_{11}(1)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2))$$
$$\left.+\frac{2N_1^2N_2}{N^3}(\mu_{12}(1)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+\mu_{21}(1)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2))\right\}+\frac{1}{n_2}\left\{\frac{N_2^2}{N^2}(\mu_{22}(2)-\mu_{11}^2(2))\right.$$

$$+\frac{N_1^2N_2^2}{N^4}(\mu_{20}(2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2+\mu_{02}(2)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2+2\mu_{11}(2)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2))$$

$$+\frac{2N_1N_2^2}{N^3}(\mu_{21}(2)(\bar{X}_2-\bar{X}_1)+\mu_{12}(2)(\bar{Y}_2-\bar{Y}_1))\Big\}-\frac{\mu_{11}}{\mu_{20}}\Big\{\frac{1}{n_1}\Big(\frac{N_1^2}{N_2}(\mu_{31}(1)-3\mu_{11}(1)\mu_{20}(1))$$

$$-\frac{N_1N_2}{N^2}(\mu_{11}(1)\mu_{20}(2)+\mu_{11}(2)\mu_{20}(1))+\frac{N_1^2N_2}{N^3}((\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)\mu_{30}(1)+3(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\mu_{21}(1)$$

$$-\mu_{20}(1)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)+2\mu_{11}(1)\mu_{20}(1)-\mu_{11}(1)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2)+\frac{N_1N_2^2}{N^3}(\mu_{11}(1)\mu_{20}(2)$$

$$+\mu_{11}(2)\mu_{20}(1))+\frac{3N_1^2N_2^2}{N^4}((\bar{X}_1-\bar{X}_2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)\mu_{20}(1)+(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2\mu_{11}(1))$$

$$+\frac{N_1^2}{N^2}(\mu_{20}\mu_{11}(1)+\mu_{11}\mu_{20}(1))\Big)+\frac{1}{n_2}\Big(\frac{N_2^2}{N^2}(\mu_{31}(2)-3\mu_{11}(2)\mu_{20}(2))$$

$$-\frac{N_1N_2}{N^2}(\mu_{11}(1)\mu_{20}(2)+\mu_{11}(2)\mu_{20}(1))+\frac{N_1^2N_2}{N^3}(\mu_{11}(1)\mu_{20}(2)+\mu_{11}(2)\mu_{20}(1))$$

$$+\frac{N_1N_2^2}{N^3}((\bar{Y}_2-\bar{Y}_1)\mu_{30}(2)+3(\bar{X}_2-\bar{X}_1)\mu_{21}(2)-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)\mu_{20}(2)+2\mu_{11}(2)\mu_{20}(2)$$

$$-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2\mu_{11}(2))+\frac{3N_1^2N_2^2}{N^4}((\bar{X}_2-\bar{X}_1)(\bar{Y}_2-\bar{Y}_1)\mu_{20}(2)+(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2\mu_{11}(2))$$

$$+\frac{N_2^2}{N^2}(\mu_{20}\mu_{11}(2)+\mu_{11}\mu_{20}(2))\Big)\Big\}-\frac{\mu_{11}}{\mu_{02}}\Big\{\frac{1}{n_1}\Big(\frac{N_1^2}{N^2}(\mu_{13}(1)-3\mu_{11}(1)\mu_{20}(1))$$

$$-\frac{N_1N_2}{N^2}(\mu_{11}(1)\mu_{02}(2)+\mu_{11}(2)\mu_{02}(1))+\frac{N_1^2N_2}{N^3}((\bar{X}_1-\bar{X}_2)\mu_{03}(1)+3(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)\mu_{12}(1)$$

$$-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)\mu_{02}(1)+2\mu_{11}(1)\mu_{02}(1)-\mu_{11}(1)(\bar{Y}_2-\bar{Y}_1)^2)+\frac{N_1N_2^2}{N^3}(\mu_{11}(1)\mu_{02}(2)$$

$$+\mu_{11}(2)\mu_{02}(1))+\frac{3N_1^2N_2^2}{N^4}((\bar{X}_1-\bar{X}_2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)\mu_{02}(1)+(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2\mu_{11}(1))$$

$$+\frac{N_1^2}{N^2}(\mu_{02}\mu_{11}(1)+\mu_{11}\mu_{02}(1))\Big)+\frac{1}{n_2}\Big(\frac{N_2^2}{N^2}(\mu_{13}(2)-3\mu_{11}(1)\mu_{02}(2))$$

$$-\frac{N_1N_2}{N^2}(\mu_{11}(1)\mu_{02}(2)+\mu_{11}(2)\mu_{02}(1))+\frac{N_1^2N_2}{N^3}(\mu_{11}(1)\mu_{02}(2)+\mu_{11}(2)\mu_{02}(1))$$

$$+\frac{N_1N_2^2}{N^3}((\bar{X}_2-\bar{X}_1)\mu_{03}(2)+3(\bar{Y}_2-\bar{Y}_1)\mu_{12}(2)-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)\mu_{02}(2)$$

$$+2\mu_{11}(2)\mu_{02}(2)-(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2\mu_{11}(2))+\frac{3N_1^2N_2^2}{N^4}((\bar{X}_2-\bar{X}_1)(\bar{Y}_2-\bar{Y}_1)\mu_{02}(2)$$

$$+(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2\mu_{11}(2))+\frac{N_2^2}{N^2}(\mu_{02}\mu_{11}(2)+\mu_{11}\mu_{02}(2))\Big)\Big\}\Big]+\frac{\mu_{11}^2}{2\mu_{20}\mu_{02}}\Big[\frac{1}{n_1}\Big\{\frac{N_1^2}{N^2}(\mu_{22}(1)$$

$$-3\mu_{20}(1)\mu_{02}(1))-\frac{N_1N_2}{N^2}(\mu_{20}(2)\mu_{02}(1)+\mu_{20}(1)\mu_{02}(2))+\frac{N_1^2N_2}{N^3}(\mu_{20}(1)\mu_{02}(1)$$

$$-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2\mu_{02}(1)+2(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\mu_{12}(1))+\frac{N_1N_2^2}{N^3}\mu_{20}(1)\mu_{02}(2)+\frac{N_1^2N_2}{N^3}(\mu_{20}(1)\mu_{02}(1)$$

$$-(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2\mu_{20}(1)+2(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)\mu_{21}(1))+\frac{N_1N_2^2}{N^3}\mu_{20}(2)\mu_{02}(1)+\frac{N_1^2N_2^2}{N^4}((\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2\mu_{20}(1)$$

$$+(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2\mu_{02}(1)+4\mu_{11}(1)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2))+2\frac{N_1^3}{N^3}\mu_{20}(1)\mu_{02}(1)+\frac{N_1^2N_2}{N^4}\mu_{20}(2)\mu_{02}(1)$$

$$+\frac{N_1^3N_2}{N^4}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2\mu_{02}(1)+\frac{N_1^2N_2}{N^3}\mu_{20}(1)\mu_{02}(2)+\frac{N_1^3N_2}{N_4}(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2\mu_{20}(1)\Big\}$$

$$+\frac{1}{n_2}\Big\{\frac{N_2^2}{N^2}(\mu_{22}(2)-3\mu_{20}(2)\mu_{02}(2))-\frac{N_1N_2}{N^2}(\mu_{20}(2)\mu_{02}(1)+\mu_{20}(1)\mu_{02}(2))$$

$$+\frac{N_1^2N_2}{N^3}\mu_{20}(2)\mu_{02}(1)+\frac{N_1N_2^2}{N^3}(\mu_{20}(2)\mu_{02}(2)-(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2\mu_{02}(2)+2(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\mu_{12}(2))$$

$$+\frac{N_1^2N_2}{N^3}\mu_{20}(1)\mu_{02}(2)+\frac{N_1N_2^2}{N^3}(\mu_{20}(2)\mu_{02}(2)-(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2\mu_{20}(2)+2(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)\mu_{21}(2))$$

$$+\frac{N_1^2N_2^2}{N^4}((\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2\mu_{20}(2)+(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2\mu_{02}(2)+4\mu_{11}(2)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2))$$

$$+\frac{N_1N_2^2}{N^2}\mu_{20}(1)\mu_{02}(2)+2\frac{N_2^3}{N^3}\mu_{20}(2)\mu_{02}(2)+\frac{N_1N_2^3}{N^4}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2\mu_{02}(2)+\frac{N_1N_2^2}{N^3}\mu_{02}(1)\mu_{20}(2)$$

$$+\frac{N_1N_2^3}{N^4}(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2\mu_{20}(2)\Big\}\Big]+O(n_i^{-3/2}) \qquad (6)$$

特に比例割当の場合は

$$D^2(r)_{\text{prop.}}=\frac{\rho^2}{n}\Big[\Big\{\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2}-\frac{1}{\mu_{20}^2}\Big(\frac{N_1}{N}\mu_{20}^2(1)+\frac{N_2}{N}\mu_{20}^2(2)+2\frac{N_1N_2}{N^3}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2(N_2\mu_{20}(1)$$

$$+N_1\mu_{20}(2))+\frac{N_1N_2}{N^5}(N_1^3+N_2^3)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^4\Big)\Big\}+\Big\{\frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2}-\frac{1}{\mu_{02}^2}\Big(\frac{N_1}{N}\mu_{02}^2(1)$$

$$+\frac{N_2}{N}\mu_{02}^2(2)+\frac{2N_1N_2}{N^3}(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2(N_2\mu_{20}(1)+N_1\mu_{02}(2))+\frac{N_1N_2}{N^5}(N_1^3+N_2^3)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^4\Big)\Big\}$$

$$+\Big\{\frac{4\mu_{2}}{\mu_{11}^2}-\frac{4}{\mu_{11}^2}\Big(\frac{N_1}{N}\mu_{11}^2(1)+\frac{N_2}{N}\mu_{11}^2(2)+\frac{2N_1N_2}{N^3}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)(N_2\mu_{11}(1)$$

$$+N_1\mu_{11}(2))+\frac{N_1N_2}{N^5}(N_1^3+N_2^3)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)^2\Big)\Big\}-\Big\{\frac{4\mu_{31}}{\mu_{11}\mu_{20}}$$

$$-\frac{4}{\mu_{11}\mu_{20}}\Big(-2\mu_{11}\mu_{20}+\frac{N_1(3N_1+N_2)}{N^2}\mu_{11}(1)\mu_{20}(1)+\frac{N_2(3N_2+N_1)}{N^2}\mu_{11}(2)\mu_{20}(2)$$

$$+\frac{2N_1N_2}{N^2}(\mu_{11}(1)\mu_{20}(2)+\mu_{11}(2)\mu_{20}(1))+\frac{N_1N_2}{N^2}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)(\bar{Y}_1-\bar{Y}_2)(\mu_{20}(1)$$

$$+\mu_{20}(2)+\mu_{20})+\frac{N_1N_2}{N^2}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^2(\mu_{11}(1)+\mu_{11}(2)+\mu_{11})$$

$$+\frac{N_1N_2}{N^5}(N_1^3+N_2^3)(\bar{X}_1-\bar{X}_2)^3(Y_1-Y_2)\Big)\Big\}-\Big\{\frac{4\mu_{13}}{\mu_{11}\mu_{02}}-\frac{4}{\mu_{11}\mu_{02}}\Big(-2\mu_{11}\mu_{02}$$

$$+\frac{N_1(3N_1+N_2)}{N^2}\mu_{11}(1)\mu_{02}(1)+\frac{N_2(3N_2+N_1)}{N^2}\mu_{11}(2)\mu_{02}(2)+\frac{2N_1N_2}{N^2}(\mu_{11}(1)\mu_{02}(2)$$

$$+\mu_{11}(2)\mu_{02}(1))+\frac{N_1N_2}{N^2}(\overline{X}_1-\overline{X}_2)(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2)(\mu_{02}(1)+\mu_{02}(2)+\mu_{02})$$

$$+\frac{N_1N_2}{N^2}(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2)^2(\mu_{11}(1)+\mu_{11}(2)+\mu_{11})+\frac{N_1N_2}{N^5}(N_1{}^3+N_2{}^3)(\overline{X}_1-\overline{X}_2)(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2)^3\Big)\Big\}$$

$$+\Big\{\frac{2\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}-\frac{2}{\mu_{20}\mu_{02}}\Big(\frac{N_1}{N}\mu_{20}(1)\mu_{02}(1)+\frac{N_2}{N}\mu_{20}(2)\mu_{02}(2)+\frac{N_1N_2}{N^3}(\overline{X}_1-\overline{X}_2)^2(N_2\mu_{02}(1)$$

$$+N_1\mu_{02}(2))+\frac{N_1N_2}{N_3}(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2)^2(N_2\mu_{20}(1)+N_1\mu_{20}(2))$$

$$+\frac{N_1N_2}{N^5}(N_1{}^3+N_2{}^3)(\overline{X}_1-\overline{X}_2)^2(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2)^2\Big)\Big\}\Big]+O(n^{-3/2}) \qquad (7)$$

となる.

実際の調査では (6) や (7) を用いて分散を計算することは大変な計算の労力を要する. そこで次のように考える. 最初の母集団を層別するとき, 2つの層への単位の分割が at random に行われるものとしよう.

この意味での平均値を $\mathfrak{E}$ で表わすと

$$\mathfrak{E}\,D^2(r)_{\text{prop.}}=\frac{\rho^2}{4n}\left(\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}{}^2}+\frac{\mu_{04}}{\mu_{02}{}^2}+\frac{4\mu_{22}}{\mu_{11}{}^2}-\frac{4\mu_{31}}{\mu_{11}\mu_{20}}-\frac{4\mu_{13}}{\mu_{11}\mu_{02}}+\frac{2\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}\right)+O(n^{-3/2}) \qquad (8)$$

となり, 主要項は層別しないで単純にサンプルを抽出したときの相関係数の分散と同一となる.

このことは層別が巧みに行われるときは, 層別をしないときの分散より小さくなり得ることを意味している. 故に実際上は比例割当をしたときでも, (7) によつて計算を行わないで, (8) によつて分散を推定しておけばまず十分であろうということが分る.

以上は $R=2$ の場合についてのべたのであるが, 一般の場合でも (6), (7) に相当するものが得られ, それの平均 $\mathfrak{E}$ をとると, 主要項は矢張り (8) と同一になることが容易に分る. 従つて結論としてはサンプル数を十分大きくとつておけば, 比例割当法を用いるとき, r の分散は (8) で計算して大丈夫だろうということになる. (ここでは r のもつ bias については触れないでおく)

N_i, n_i が小さくて必ずしも適切ではないが, 模型的な一例をあげておこう.

例　$N_1=N_2=3,\quad n_1=n_2=2$

母集団は次表の如きものとする.

x	1	2	3	7	8	9
y	4	5	3	8	10	13
	第1層			第2層		

$\rho=0.9259$

このとき次のような結果が得られる.

Ⅰ　層別しないとき　$r=0.9325,\quad s_r{}^2=0.001444$

Ⅱ　層別したとき (ijk) で第1層の要素を示す.

場合	(123)	(127)	(128)	(129)	(137)	(138)	(139)	(237)	(238)	(239)	平均
r	.9427	.9291	.9222	.9224	.9406	.9361	.9292	.9403	.9357	.9263	.9325
$s_r{}^2$	.000587	.000498	.001346	.001686	.000723	.002174	.002036	.000678	.002142	.002052	.001392

(8) 式の $D^2(r)_{\text{prop.}}$ の主要項 $=0.000911$

これよりみても層別した方が r の分散は小さくなり得ることが看取できよう.

統計数理研究所